



TITLE:

離散可積分系とスケール変換: 連続・離散・超離散 (生物学的時間とスケール変換) (離散力学系の分子細胞生物学への応用数理)

AUTHOR(S):

辻本, 諭; 豊島, 有; 鈴木, 健太; 浦久保, 秀俊

CITATION:

辻本, 諭 ...[et al]. 離散可積分系とスケール変換: 連続・離散・超離散 (生物学的時間とスケール変換) (離散力学系の分子細胞生物学への応用数理). 数理解析研究所講究録 2010, 1698: 78-91

ISSUE DATE:

2010-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/141700>

RIGHT:

京都大学大学院情報学研究科 辻本諭

タイトル「離散可積分系とスケール変換

～連続・離散・超離散～」

No.1 自己紹介

私は、離散可積分系とよばれる力学系を専門にしています。離散可積分系は直交多項式や数値計算アルゴリズムとも関係しています。出身学部は工学部の電子通信で、元々数学科でも無ければ理学部でもありませんので、他の方とは異なっております。今回は数学サイドとして紹介して頂きまして、大変光栄に思っております。

自己紹介

- 共同研究「離散力学系の分子細胞生物学への応用数理」
生物学的時間とスケール変換（数学）の講演者
- 専門分野：離散可積分系
（直交多項式，数値計算アルゴリズム）
- 出身学部：工学部 電気・電子・通信

No.2 soliton!

代表的な Soliton 方程式 (KdV 方程式) は次の数式で表されます。

Soliton!

KdV 方程式 (代表的 Soliton 方程式)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

非線形でありながら “解ける” ← **可積分**

- たくさんの任意パラメータを含む特解の存在
- さまざまな物理現象にあらわれる

KdV → 浅水波のモデル方程式

NLS → 光ファイバー中を伝搬する波, 渦糸モデル

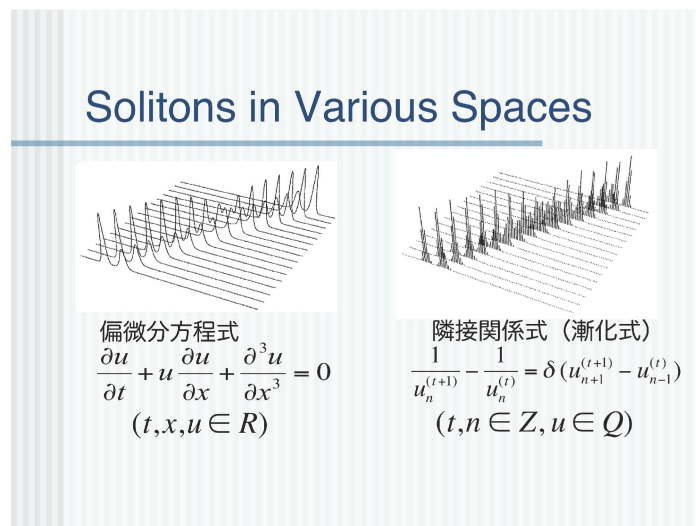
KdV 方程式の第 2 項である $u \, du / dx$ が非線形項です。非線形項が無ければ線形方程式ですから、フーリエ変換などを用いて何なりと解くことが出来ます。非線形項があると、通常はどのように解けば良いか分かりませんが、ある特別な性質を持っておりまして、非線形でありながら解くことができます。「解ける」というのは、微分方程式が「積分可能」であるという意味です。積分可能という意味から我々は「可積分」という名前を総称として使っております。厳密な意味で数学の人に可積分とは何か聞けば定義はないと答えられるのが普通ですが、ここではもう少しラフに「解ける」という言葉も人それぞれ自由に定義してくださいというスタンスです。可積分は「解ける」ということですから、解を持っているということと表裏一体です。それも解析関数で書ける。ソリトンであれば、指数関数の有理関数で書けます。すなわち、指数関数の線形結合を分母分子に持つ関数として書けます。KdV 方程式は偏微分方程式ですので、その中に無限自由度の解があり、さらに沢山の任意パラメータを含む特解が存在します。それは N・ソリトン解と呼ばれるもので、ソリトンを $N=1,2,3,\dots$ といくつでも入れることができます。

アニメーションを見てみましょう。ご覧の様に一つの孤立波が安定的に伝播する。線形ではこのような現象はありえません。アニメーションでは一つの波ですが、2つのソリト

ン波を重ね合わせることができて、重なりあう時に非線形な相互作用をして、位相のズレを起こします。このアニメーションは空間 1 次元時間 1 次元でしたが、空間を 2 次元にしても解を持っていて、方程式を解くことができます。この辺は佐藤幹夫先生による、非常に素晴らしい KP 理論が構築されています。

KdV 方程式はもともと物理現象として発見されました。今から 100 年くらい前、John Scott Russell がスコットランドの用水路で孤立波を観測したのが始まりです。それを Korteweg と de Vries がモデル化しました。したがって、空間方向も時間方向も連続な偏微分方程式として記述されています。さらに、ソリトンは Non-linear Schrodinger (NLS) 方程式においても見られるといった報告が重なりまして、今では可算無限個のソリトン方程式があることが知られています。

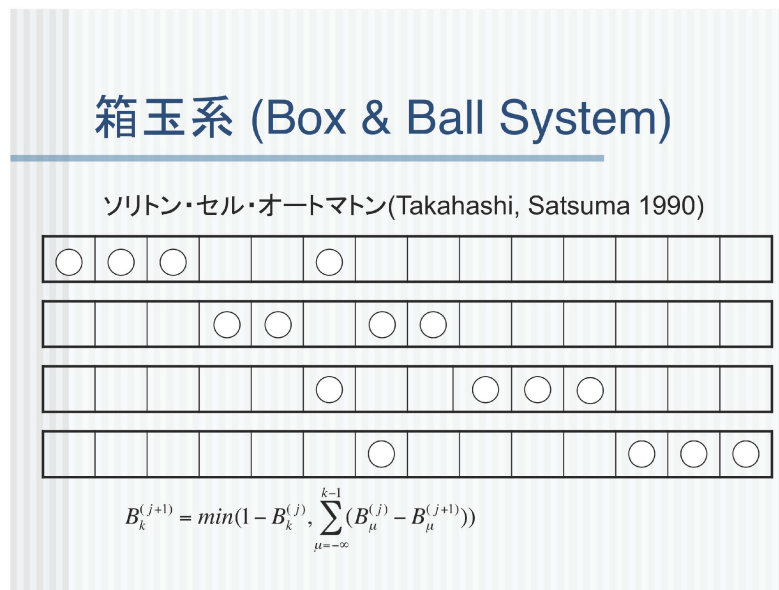
No.4 Solitons in various spaces



ソリトンは物理現象として発見されたので、空間も時間も連続な偏微分方程式として記述されます (左)。しかし、ソリトン (可積分系) は必ずしも連続変数の中だけに存在するのではなく、右の隣接関係式の中にみることにも出来ます。ここで、隣接関係式中の $u_n^{(t)}$ や $u_n^{(t+1)}$ は u のべき乗ではなく、離散時刻 t におけるサイト n の間の関係を示します。図は 2 次元ですから漸化式と呼ぶことがふさわしいかどうか分かりませんが、一次元の場合は漸化式そのものです。このようにソリトンは非線形な隣接関係式においても存在します。さらに、ソリトンは空間時間について離散な隣接関係式の中にだけでなく、セル・オートマトン中においても存在することが知られています。

No.5 箱玉系 (Box & Ball System)

箱玉系 (Box & Ball System)



ソリトン・セルオートマトンの最も基本的な系は、Takahashi-Satsuma により 1990 年に発見された箱玉系 (BBS) と呼ばれる系です。箱玉系では無限、ないしは半無限個の箱を用意し、一つの箱には一つの玉しか入らないとして、何個か (有限個) の玉で箱を埋めて初期値として与えます。その初期値に対して、時間発展として一番左側にある玉(●)を最近接の右側の空き箱(□)に移していくという処理をします。仮に、

初期状態 ●●●□□●□□□□□□□

としたとき、一番左側にある玉を最近接にある、右側の空き箱に移します。同様に、左から 2 番目の玉を最近接にある空き箱へ、3 番目、4 番目と移しますと、時刻 t から $t+1$ へと移動させた結果は次の通りになります。

□□□●●●□□□□□□

これは次の時間発展のための初期条件となります。玉の数は前後で 4 つと変化なく、これは保存系です。以下同様に時間発展させて行きますと、次の通りになります。

□□□□●□□●●●□□□

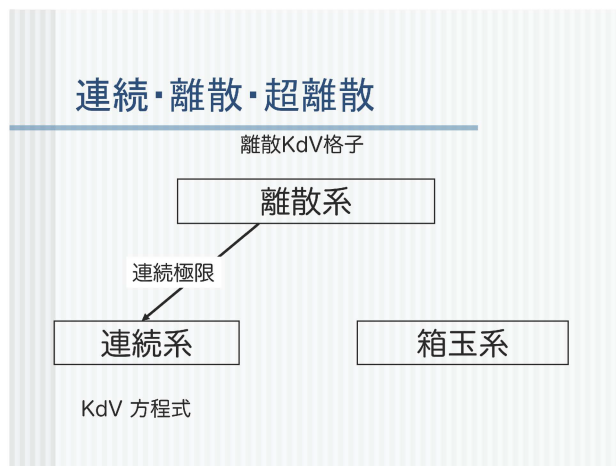
□□□□□●□□□□●●●

先ほどアニメーションでお見せしたソリトン（孤立）波と比べていただきたいのですが、ソリトンとは孤立波が安定して伝播する。2つの孤立波が衝突した後にも保存している。かつ、衝突前後で位相のズレを起こす特徴をもち、それは箱玉系でも保存します。

箱玉系において波は高さが1と制限されていますが、その分横に連なります。相互作用中の状態は別に議論することにして、ソリトン同士が十分離れている状態で、一連の横並びの玉を1つのソリトンと思うと、ソリトンは横のつながりが多いほど速く移動します。つまり3つ横に繋がった玉は速さが3のソリトンとなります。それに対して、玉が一つの場合は各時間ごとに1つずつしか移動しない、速さが1のソリトンになります。KdV方程式など、通常のソリトンでは波が高いほど速いのですが、箱玉系においては、連なっている玉の数が波の高さに相当します。波同士が衝突して相互作用すると、高さ1（連なった玉の数が1）のソリトンでは速さ1の移動が2時間ステップ分停止するという位相のズレを実現します。これは元々のKdV方程式で見てきた位相のずれに対応します。この箱玉系は、KdV方程式などとはまったく独立に、Takahashi-Satsuma先生の洞察力によって天から降ってくるように発見されました。

No.6 連続、離散、超離散

箱玉系の話は、見た目はもちろん離散系・連続系のKdV方程式と違うわけで、離散系・連続系・箱玉系はそれぞれ独立に存在するように見えます。もちろん、離散系と連続系の間は深い関係があり、離散系の連続極限は連続系になることは想像の範囲内です。では箱玉系と他の可積分系（離散系・連続系のKdV方程式）の間では何らかの意味で直接の関係は見取れないか？ということを知りたくなります。そこで、まず前段階として、離散系と連続系の間の関係を見たいと思います。



No.7 可積分系のマスター方程式

行列式の恒等式は、可積分系に隠れている最も基本的な構造です。行列式の恒等式はケースバイケースで色々な方程式がありますが、行列式の恒等式を導く一番単純な方程式、すなわち離散 KP 方程式（双線形方程式、広田形式）を考えることができます。

可積分系のマスター方程式

■ 離散KP方程式 (双線形方程式, 広田形式)

$$\begin{aligned} & \tau(k-a, l, m) \tau(k, l-b, m-c) \\ & - \tau(k, l-b, m) \tau(k-a, l, m-c) \\ & + \tau(k, l, m-c) \tau(k-a, l-b, m) = 0 \end{aligned}$$

離散変数 : k, l, m , 差分間隔 : a, b, c

全ての独立変数が対等,
時間と空間の差異はない.
次元簡約, 極限操作により様々な可積分系へ

KP 方程式は 2 次形式、双線形形式になっており、広田先生によって導入された関数 τ で表現されています。ここで k, l, m は離散変数で、 a, b, c は差分間隔です。差分間隔とは、例えばある離散変数の値 k について、次に $a+k$, $a+2k$ と離散変数を取りうる値の間隔を与えます。式は、 τ という変数の 3 次元空間中における 6 点格子上の値の関係式を要請しています。次元簡約すると、空間 1 次元時間 1 次元に落とすこともできます。KP 方程式に次元簡約ともう一つひねりを加えると KdV 方程式を得ることもできます。KdV 方程式のみならず、次元簡約、極限操作で様々な、多くの可積分方程式を離散 KP 方程式から導出することができます。

ここで注目して欲しいのは、独立変数 k, l, m がすべて対等であるということです。式中、各項は一つの離散変数についてのみシフトしています。式は非常に対称性に富んでおり、ここに対称群が関与しているとする話も納得がいきます。式中、時間と空間の差異はありません。午前中の話とあわせると、KP 方程式は大変未分化な、ある種の幹細胞のように考えても良いかも知れません。

No.8 生物学的独立変数とスケール変換

ここで、やっとスケール変換という言葉が出てきます。加藤先生が「スケール変換」というテーマの元で私を呼んでくださったのは、これから話すことが役に立つのではないかと期待されたのではないかと想像します。すなわち、生物学的「独立変数」におけるスケール変換のような物があるか？というテーマです。可積分系においては、時間と空間は対等です。もちろん、物理の世界では、時間と空間では空間の方が粗くてもよろしいとか区別がありますが、その辺は度外視して、生物学的「独立変数」のスケール変換があるのか？もちろん現在私には良いアイディアはありませんが、時間方向の老化や進化と、空間方向の分子、器官、細胞、個人、集団をつなぐ理論はあるのか？という事です。存在すると仮定すると、どのような状況が期待されるのか？考えましょう。

生物学的独立変数とスケール変換

- 例：老化，進化
- 例：Molecule, organcells, cell, organ, individual, population
- これらの間を“つなぐ”理論はあるのか？
- 存在すると仮定するとどのような状況が予想（期待）されるのか？

No.9 モデル化 (Toy model)

そのような議論をするためには、モデル化が必要でしょう。なぜなら、小規模システムでさえ非線形なものを長時間スケールや大規模システムにしておくと複雑さの爆発が不可避免です。これを我々が扱うことはできません。したがって、ある種の簡単化の手法が必須になりますが、簡単化の過程で本質を捨ててしまつては、例えば、すべて線形近似してしまつては何も面白いものは出てこない。では、本質とは何でしょう？生物学における大事なものはそのときそのときで異なると思いますが、ソリトンにおける状況は比較的是っきりしています。対象とするどのレベルでもソリトン解を持っていることです。このような本質的なものを保存した単純化が必要です。

モデル化 (Toy model)

- 長時間スケールや大規模システムにおいては、“複雑さ”の爆発が不可避
- “単純化”の手法が必要
- しかし、本質を捨ててしまってはダメ
→ ?
- ソリトンにおける状況は. . .

No.10 KdV 格子と LV (Lotka-Volterra) 格子

もちろん、ソリトン解を持つといった本質を保存した単純化は、生物学にそのまま使えることは期待できません。しかし、先ほど紹介した箱玉系はとても簡単でした。箱玉系と離散系や連続系の KdV 方程式の間にある種の対応がつく、単純化の原理みたいなものが隠れていると非常に嬉しいです。そのような単純化の原理がソリトン系あるいは可積分系の世界では見つかっています。たとえこれが直接生物系に使えなくとも、このような成功例をご紹介しますことは意義あることと思っております。

KdV 格子と LV 格子

- KdV 格子

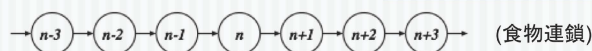
$$\frac{d}{dt} \frac{1}{u_n} = u_{n+1} - u_{n-1}$$

ミウラ変換

$$v_n = u_n u_{n-1}$$

- Lotka-Volterra (LV) 格子

$$\frac{d}{dt} v_n = v_n (v_{n-1} - v_{n+1}) \quad u_n = \sum_{j=-\infty}^n \frac{v_j}{v_{j-1}}$$



可積分性を保存したKdV方程式の離散空間類似！

偏微分方程式をいきなり箱玉系に持ってゆくことは、ソリトン系においても非常に難しいので、一旦、離散系を経由して箱玉系との対応を考えます。上には既に答えを示しています。離散空間類似というもので、上記離散 KdV 格子と離散 LV 格子は、見かけは違いますがどちらもそれぞれ適当な変数変換とスケーリング、そして差分間隔 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限操作をすることで KdV 方程式に帰着させることができます。

この一見違う 2 つの式は、ミウラ変換という非線形変換の公式 ($v_n = u_n u_{n-1}$) で結ぶことができます。KdV 格子を二つずらしてミウラ変換にしたがって v_n を定義すると、それは Lotka-Volterra 方程式の解になっています。

連続極限

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{u_n} = u_{n+1} - u_{n-1}$$

$$u_n = 1 + \epsilon^2 U(n, t)/2$$

$$T = -\epsilon^3 t/3, \quad X = \epsilon(n - 2t)$$

$$\epsilon \rightarrow 0 \quad \frac{\partial U}{\partial T} = 6U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial^3 U}{\partial X^3}$$

No.11 離散系特有の解(分子解) & No.12 分子解とソリトン解

さらに、これまでソリトン解の話しかしていませんでしたが、境界を 0 とした分子解に拡張することができます (以下、時間の都合で省略)。

離散系特有の特解(分子解)

離散 Lotka-Volterra 方程式

$$\frac{U_n^{t+1}}{U_n^t} = \frac{1 + U_{n+1}^t}{1 + U_{n-1}^{t+1}}$$

を境界条件 $U_0^t = 0$ のもとで解く。

双線形差分方程式

$$\tau_{n+1}^{t+1} \tau_n^t - \tau_{n+1}^t \tau_n^{t+1} = \tau_{n-1}^{t+1} \tau_{n+2}^t$$

を境界条件 $\tau_{-1}^t = 0, \tau_0^t = \tau_1^t = 1$ のもとで解く。

さらに、境界条件 $U_N^t = 0$ を課すと有限格子

固有値
特異値
アルゴリズム

No.24 超離散系

超離散系を定義しますと、すべての独立変数、従属変数が整数の中に閉じたシステムのことです。箱玉系では、波の高さは1でしたが、波の高さも1、2、、と言った整数に制限します。

離散時間・離散空間, 非自励系

■ 行列形式

$$A\varphi(x) = (x - \lambda(t)) \varphi(x), \quad A \in \text{Mat}(N, N)$$

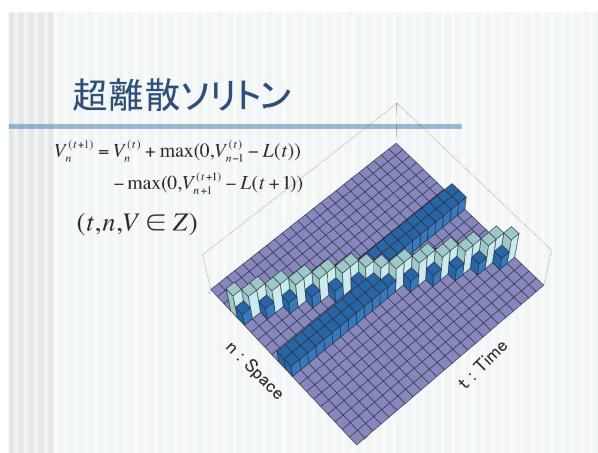
■ dKdV, dLV, d-戸田格子 (離散時間, 離散空間)

固有値
特異値
アルゴリズム

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) + a_n \varphi_n(x) + b_n \varphi_{n-1}(x) \\ = (x - \lambda(t)) \varphi_n(x) \end{aligned}$$

No.25 超離散ソリトン

超離散ソリトンの図を示します。箱の強度 1、強度 2 といった不連続な強度のソリトン波同士の非線形相互作用をみることができます。



No.26 離散から超離散へ

このような離散から超離散への変換は系統的に導出することが出来て、我々の業界ではそれを超離散化と呼んでいます。一方、代数幾何の分野ではトロピカル幾何と呼びます。

離散から超離散へ

- 超離散化（トロピカル幾何）

Ultradiscrete limit

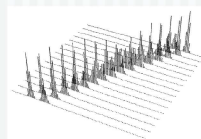
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max(A, B)$$

$$A \cdot B \rightarrow A + B$$

$$A \div B \rightarrow A - B$$

$$A + B \rightarrow \max(A, B)$$

区分線形な力学系へ



上に示す、**Ultradiscrete limit** と呼ばれる極限を離散系に適用します。それは下に示すように、掛け算を足し算に、割り算を引き算に、足し算を **max** にする変換になります。

$$A \cdot B \rightarrow A + B$$

$$A + B \rightarrow A - B$$

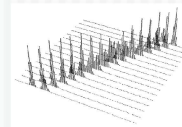
$$A + B \rightarrow \max(A, B)$$

こういった極限操作より先ほどの KdV 格子や LV 格子は区分線形な力学系へ変換され、離散 LV 格子は超離散 LV 格子へ変換されます。すなわち、独立変数、従属変数の初期値に整数を与えると整数の中で閉じた式へ変換することが出来ます。

離散から超離散へ

- 離散 LV 格子

$$\frac{v_n^{(t+1)}}{v_n^{(t)}} = \frac{1 + \delta^{(t)} v_{n-1}^{(t)}}{1 + \delta^{(t+1)} v_{n+1}^{(t+1)}}$$



$$\begin{cases} v_n^{(t)} = \exp(V_n^{(t)} / \varepsilon) \\ \delta^{(t)} = \exp(-L / \varepsilon) \end{cases}$$

Ultradiscrete limit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max(A, B)$$

- 超離散 LV 格子

$$V_n^{(t+1)} - V_n^{(t)} = \max(0, V_{n-1}^{(t)} - L(t)) - \max(0, V_{n+1}^{(t+1)} - L(t))$$

$L(t)$: 任意関数

- 解も含めて導くことができる

No.27 超離散 KdV 格子

これまでスライドでは離散 LV 格子の場合について解きましたが、同様の変換を離散 KdV 格子に適用しますと、箱玉系の式そのものが得られます。

超離散 KdV 格子

超離散ミウラ変換を

$$V_k^{(j)} = \sum_{\mu=-\infty}^k (U_\mu^{(j)} - U_{\mu-1}^{(j+1)})$$

$$v_k^{(j)} = \prod_{\mu=-\infty}^k \frac{u_\mu^{(j)}}{u_{\mu-1}^{(j+1)}}$$

超離散 LV に代入すると

$$V_{k+1}^{(j+1)} - V_k^{(j)} = \max(0, V_k^{(j+1)} - L(k)) - \max(0, V_{k+1}^{(j)} - L(k))$$

超離散 **KdV** 格子が得られる

$$U_k^{(j+1)} = \min(L(k) - U_k^{(j)}, \sum_{\mu=-\infty}^{k-1} (U_\mu^{(j)} - U_\mu^{(j+1)})) .$$

$(j, k \in \mathbb{Z}, U \in \{0, 1\})$

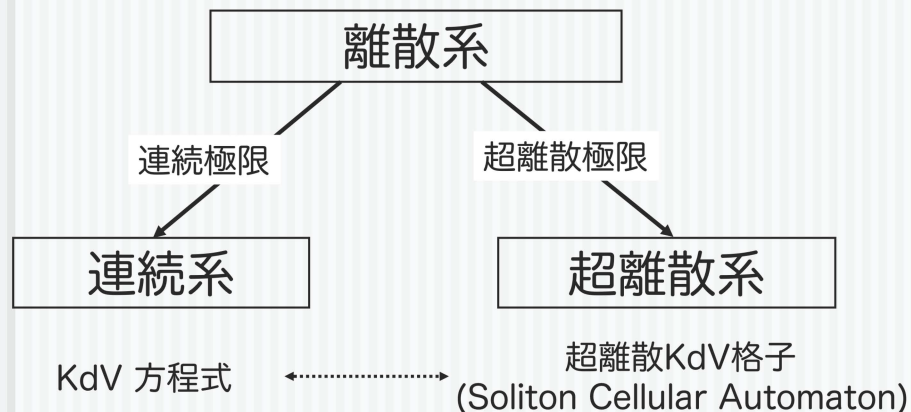
Box and Ball System

No.28 終わり

まず離散系ありきとすると、離散系に対する連続極限（近似）をして連続系を得るという簡単化もありますが、逆に離散系の超離散極限をとると超離散系になり、非常に簡単な箱玉系までスケール変換することができる。離散系をマイクロだとすれば、スケール変換によって得られる箱玉系はマクロであって、非常に複雑になることが予想されますが、現実にはより簡単な式が得られる。そして、その上でより複雑なことを考えることもできる。このような解析を行うことができれば我々としては非常に嬉しく思うわけです。

おわりに

離散KdV格子



質問・コメント等

(質問) 超離散系で出てきた方程式の解は離散系の解を形式的に手続きに従って変換すると出てくるのでしょうか？すなわち一般的に解を導くことはできるのか？

(回答) かなり一般的にできる。超離散極限を取れない解もあるが、ソリトン解、分子解のクラスなら大丈夫です。

(質問) 超離散化の場合保存系が前提だが、散逸系に適用した場合は上手く行っているのか？

(回答) もともと箱玉系を作った高橋先生が研究されている。見た目はうまくいっている場合も沢山あるが解析的に解けないので判定できない。

(質問) 箱玉系の玉の数を増やすとどうなるか。玉の数が無限大になると左端がなくなつてどこから始まるか分からないのでは？

(回答) 左右をつなげて周期系にした研究があり、玉の数が箱の数の半分よりも少なければ通常の箱玉系だが、多いと玉と箱の関係が入れ替わります。しかし、それも問題ありません。

(質問) 元の偏微分方程式の L^2 解に相当するが、エネルギー無限大の解は？

(回答) ソリトンの場合は玉の数を有限個に限っている。

(質問) 方程式の空間に群が作用していてソリトンが決まるという理解でよいのか？

(回答) 非線型方程式は過剰決定系で、条件のほうパラメータの数より圧倒的に多い。そういった状況で解けるためにはある種の対称性が高いことが必要。

(質問) スケール変換によって対応関係が取れているというのは、数学的にはきれいだが生物ではスケールを変えると見えていなかったものが見えてくる。スケール変換できない方が普通なのではないか。

(回答) 通常は、スケール変換で対応関係が取れることはないかも知れないが、たとえ理想的な状況でも対応が取れるような場合があれば、それを手がかりに数学の色々な道具を導入することが可能なのではないかと？

(以上で辻本先生のお話を終わります。)